Olimpiada Paceña de Matemática
Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática,
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés,
La Paz, Bolivia.

Cuaderno N° 1

Banco de Problemas 2015

Categoría α

(1ro y 2do de Secundaria)

Editado por
Jimmy Santamaria Torrez

La Paz – Bolivia

Presentación

Por primera vez presentamos un grupo de problemas con los cuales los estudiantes y profesores interesados en participar de la Olimpiada Paceña de Matemática puedan prepararse. Les recordamos que una olimpiada no es una evaluación de conocimientos y los problemas que encontrarán en este Cuaderno son una referencia de las características de los problemas que encontrarán en la Primera Fase de la OPM y no es una descripción de contenidos.

Cada cuaderno está divido en cuatro secciones y sugerimos que se trabaje con la siguiente metodología. Una vez que se intente resolver un problema, compare su solución con la que se encuentra en la Claves, si no coinciden, puede ver las sugerencias y revisar su solución. Una vez que encuentre la solución compare con la que se da en el tercera sección. Una solución se valora y entiende mejor cuando se ha intentando resolver el problema por algún tiempo.

Para aprender a resolver problemas, se deben resolver muchos problemas. Claro, comenzando con los adecuados al nivel, pero cada vez deben ser más completos y sus soluciones deberán requerir mayor ingenio y experiencia.

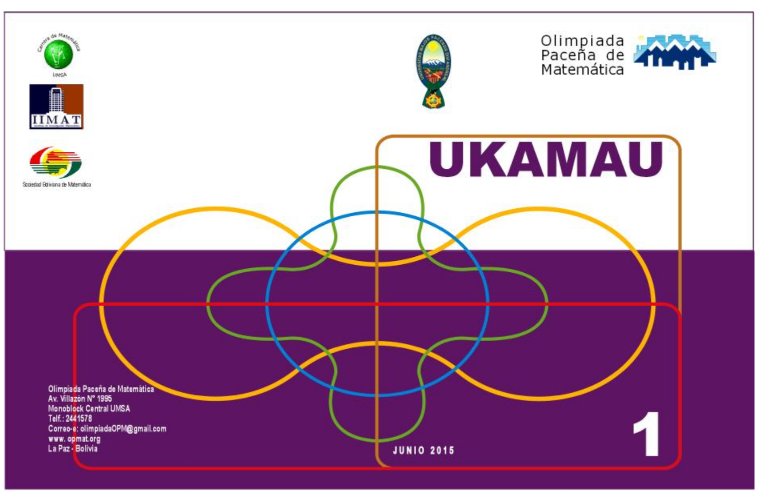
1 de agosto de 2015

Olimpiada Científica Estudiantil Plurinacional Boliviana

Material cedido para su distribución en medios magnéticos por el Instituto de Investigación Matemática-IIMAT, dependiente de la Carrera de Matemática de la Facultad de Ciencias Puras y Naturles-U.M.S.A., al Viceministerio de Ciencia y Tecnología del Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia.

14 de marzo de 2016

Material de Olimpiadas: Revista UKAMAU



UKAMAU, es la revista de la Olimpiada Paceña de Matemática. La Revista UKAMAU es una publicación regular del Instituto de Investigación Matemática-IIMAT de la Universidad

Mayor de San Andrés con la colaboración de la Sociedad Boliviana de Matemática. En el año 2015 se han publicado los dos primeros números de la Revista, el primer número tiene 109 problemas de olimpiadas para secundaria con solución completa, además de 63 problemas propuestos. El número dos tiene 145 problemas para secundaria con solución completa.

Cualquier número de la Revista UKAMAU tiene costo de Bs. 25, están disponibles para su compra en:

1. Biblioteca de la Carrera de Matemática. Edificio Antiguo, Monoblock Central. Av. Villazón No 1995(Horario de oficina).

2. Si está interesado en hacer la comprar desde el interior de Bolivia, escribir para olimpiadaOPM@gmail.com

Índice

1. Enunciados de los problemas

1. El valor de $2\frac{1}{10} + 3\frac{1}{100} + 4\frac{1}{1000} + 5\frac{1}{10000}$ es

   (A) 14,1111 (B) 14,4321 (C) 14,1234 (D) 14,1414 (E) 14

2. El valor de $(-1)^{100} - (-1)^{99} + (-1)^{98} + (-1)^{97}$ es:

   (A) -1 (B) 0 (C) -2 (D) 1 (E) 2

3. El número 201520165 es divisible por:

   (A) 3 (B) 2 (C) 11 (D) 9 (E) Ninguno anterior

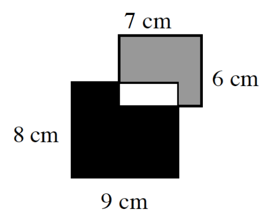
4. Si $S = 7 \times 10000 + 6 \times 1000 + 5 \times 10 + 4 \times 1$,entonces S es igual a:

   (A) 7654 (B) 76054 (C) 76543 (D) 76504 (E) 70654

5. Si una máquina produce 150 juguetes en un minuto, ¿cuántos juguetes produce en 10 segundos?

   (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

6. Dos rectántuglos que miden $6\,\text{cm} \times 7\,\text{cm}$ y $8\,\text{cm} \times 9\,\text{cm}$ se superponen como se muestra en la figura. La región gris tienen una área de $32\,\text{cm}^2$. ¿Cuál es el área de la región en negro?



   (A) $64\,\text{cm}^2$ (B) $62\,\text{cm}^2$ (C) $60\,\text{cm}^2$ (D) $70\,\text{cm}^2$ (E) $71\,\text{cm}^2$

7. Un número primo es un "superprimo"si al duplicarle y aumentarle 1 se obtiene nuevamente un número primo. ¿Cuántos superprimos menores a 30 hay?

   (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

8. El área de un rectángulo es 1. Se forma un triángulo cortando por la línea que une los puntos medios de dos lados adyacentes. ¿Cuál es el área del triángulo que se obtiene?

   (A) 1/3 (B) 1/4 (C) 2/5 (D) 3/8 (E) 1/8

9. Martha Sofía tiene 32 años. En 10 años, la edad de Martha Sofía será igual a la suma de las edades de sus tres hijos tendrán entonces. En el presente, ¿cuánto suman las edades de los tres hijos de Martha Sofía?

   (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

10. ¿Cuál es la diferencia en entre el mayor número y el menor número de tres dígitos que se pueden formar? Los dígitos de cada número deben ser distintos.

    (A) 899 (B) 885 (C) 800 (D) 100 (E) Otro número

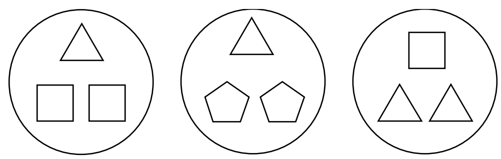
11. En un juego, Mónica cuenta del 1 al 100 y aplaude cada vez que ella pronuncia un múltiplo de 3 o un número que termina en 3. ¿Cuántas veces aplaudió Mónica?

    (A) 30 (B) 33 (C) 36 (D) 39 (E) 43

12. Un cubo tiene un volumen de 125cm^2. ¿Cuál es el área de una de las caras del cubo?

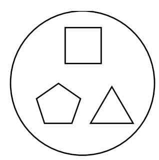
    (A) 20cm^2 (B) 25cm^2 (C) 625cm^2 (D) 5cm^2 (E) 75cm^2

13. Tres platos, A, B y C están ordenados de acuerdo a su peso de manera creciente.



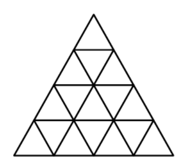
A B C

Para mantener este orden, el plato D



debe colocarse:
(A) después de C,
(B) C y D tienen el mismo peso,
(C) antes de A,
(E) entre A y B,
(F) entre B y C.

14. El siguiente diagrama muestra 16 triángulos equiláteros iguales:



¿Cuántos rombos diferentes se pueden formar usando dos triángulos vecinos de los 16 triángulos?

(A) 18 (B) 20 (C) 5 (D) 15 (E) 16

15. Cada persona de un grupo de 10 estudiantes calcula la suma de las edades de los otros nueve integrantes del grupo. La diez sumas obtenidas fueron 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 90, 91 y 92. Determine la edad del estudiante más joven.

    (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

2. Sugerencias y hechos que ayudan

1. Recuerda que $4\frac{1}{5}$, se trata de 4 enteros aumentado en $1/5$, es decir $4\frac{1}{5} = 4 + \frac{1}{5}$. Recuerda también que, divir un número entre 10, 100, o cualquier potencia de 10, se resume en un desplazamiento.

2. (-1) elevado a potencias pares es 1 y a potencias impares -1.

3. Los criterios de divisibilidad por 2,3, 5 y 9 son conocidos. Existe un criterio para la divisibilidad por 11 consiste en tomar los dígitos y sumarlos y restarlos, si se obtiene un múltiplo de 11, el número original también será múltiplo de 11. Por ejemplo

   a) Para ver si 4121 es múltiplo de 11, realizamos la operación $1 - 2 + 1 - 4 = -4$, que como no es múltiplo de 11, podemos concluir que 4121 tampoco lo es.

   b) 561 es mútiplo de 11 porque $1 - 6 + 5 = 0$ que es múltiplo de 11.

4. Recuerda que significan las unidades, decenas, centenas, y unidad de mil de un número dado.

5. Se puede usar regla de tres directamentemente proporcional.

6. La información del área del cuadrado en blanco puede ayudar.

7. Los primos que no son superprimos se pueden ir descartanto uno por uno.

8. Realiza una figura del triángulo que se forma e intenta encontrar otros triángulos parecidos.

9. En 10 años todos habrán aumentado su edad en 10 años.

10. Encuentra cuál es el mayor número que se puede formar con tres dígitos diferentes. También el menor, aquí deberás tener cuidado con el cero.

11. Es fácil determinar cuántos son mútiplos de 3, descarta los que terminan en 3 que los hayas contado antes.

12. Usa la fórmula para calcular el volumen de un cubo.

13. Compara platos para saber que figuras pesan menos.

14. Un rombo es un paralelogramo cuyos lados miden lo mismo. Determina qué tipos de posibles rombos se pueden formar.

15. Analiza las veces que aparece cada una de las edades en las 10 sumas obtenidas.

3. Soluciones

1. ***Respuesta*** **(A)**. *Solución 1.* Calculamos cada uno de los sumandos

$$\begin{array}{rcccccl} 2\frac{1}{10} & = & 2+\frac{1}{10} & = & \frac{21}{10} & = & 2,1 \\ 3\frac{1}{100} & = & 3+\frac{1}{100} & = & \frac{301}{100} & = & 3,01 \\ 4\frac{1}{1000} & = & 4+\frac{1}{1000} & = & \frac{4001}{1000} & = & 4,001 \\ 5\frac{1}{10000} & = & 5+\frac{1}{10000} & = & \frac{50001}{10000} & = & 5,0001 \end{array}$$

Entonces, $2\frac{1}{10}+3\frac{1}{100}+4\frac{1}{1000}+5\frac{1}{10000}=14,1111$.

Solución 2. Se podría proceder directamente, notando que dividir 1 entre 10, 100, 1000 y 1000 es sencillo. En efecto,

$$2\frac{1}{10}+3\frac{1}{100}+4\frac{1}{1000}+5\frac{1}{10000}=2+3+4+5+0,1+0,01+0,001+0,0001=14,1111$$

2. ***Respuesta*** **(E)**. En efecto,

$$(-1)^{100}-(-1)^{99}+(-1)^{98}+(-1)^{97}=(1)-(-1)+(1)+(-1)=2.$$

3. ***Respuesta*** **(C)**. Es tentador efectuar las operaciones de división habitual:

$$201520165 \,\underline{|\;2\;} \qquad 201520165 \,\underline{|\;3\;} \qquad 201520165 \,\underline{|\;11\;} \qquad 201520165 \,\underline{|\;9\;}$$

Pero, esto llevaría *"algún"* tiempo. Usando los criterios de divisibilidad: 201520165 no es divisible por 2 porque no termina en un dígito par; 201520165 no es divisible por 3, pues $2+0+1+5+2+0+1+6+5=22$ no es múltiplo de 3. Con mayor razón, no será mútiplo de 9. Por otra parte,

$$5-6+1-0+2-5+1-0+2=0.$$

Como 0 es múltiplo de 11, porque $0=0\times 11$, tenemos por el criterio de divisibilidad correspondiente que 201520165 es divisible por 11.

4. ***Respuesta*** **(D)**. Podríamos realizar las multipliaciones y sumar obteniendo la respuesta buscada. Sin embargo, notamos

$$S=7\times 10000+6\times 1000+5\times 10+4\times 1=7\times 10^4+6\times 10^3+5\times 10^1+4.$$

Es decir, S tiene 4 unidades, 5 decenas, 6 unidades de mil y 7 decenas de mil. Por tanto, $S=76054$.

5. ***Respuesta*** **(B)**. Ciertamente este problema se resuelve fácilmente utilizando la regla de tres directamente proporcional. Sin embargo, daremos una solución más sencilla. Si en 1 minuto, que son 60 segundos, se producen 150 juguetes, en la tercera parte de tiempo (20 segundos) se producirán 50 juguetes. Luego en 10 segundos se producirán 25 juguetes.

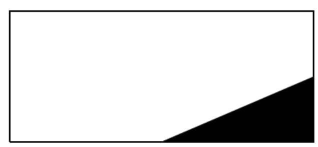
6. ***Respuesta* (B)**. Como el área del rectángulo de $6\,\text{cm} \times 7\,\text{cm}$ es de $42\,\text{cm}^2$, el área del rectángulo en blanco es $(42-32)\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2$. Por tanto el área de la región en negro es $(8 \times 9 - 10)\,\text{cm}^2 = 62\,\text{cm}^2$.

7. ***Respuesta* (C)**. Los primos menores a 30 son 2, 3, 5, 7 ,11, 13, 17, 19, 23 y 29. La operación de duplicar y sumar a cada uno de estos números se resume en la tabla

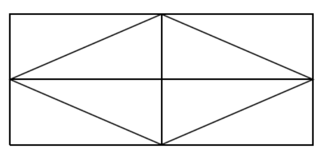
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
5	7	11	15	23	27	35	39	47	59

Los únicos primos de la segunda fila son 5, 7, 11, 23, 47 y 59. Por tanto 2, 3, 5, 11, 23 y 29 son superprimos.

8. ***Respuesta* (E)**. Notemos que el rectángulo puede tener distintos lados sin embargo cumpliendo con la condición del área igual a 1. De acuerdo al problema, el triángulo que se forma tiene la siguiente forma:



Trazando todas las líneas entre los puntos medios vemos que se forman 8 triángulos de la misma área, por tanto, la respuesta es 1/8.



9. ***Respuesta* (C)** En 10 años, Martha Sofía tendrá 42 años y entonces la suma de las edades de sus tres hijos será también de 42 años. Como cada uno de los hijos aumentó su edad en 10 años, actualmente sus edades suman $42 - 30 = 12$.

10. ***Respuesta* (B)** El mayor número de tres dígitos distintos que se puede formar es 987 y el menor que se puede formar es 102, por tanto la respuesta es $987 - 102 = 885$.

11. ***Respuesta* (D)** Los mútiplos de 3 serán 33: estos son 3,6,9, y así sucesivamente, hasta llegar al 99. Sin embargo, los candidatos que terminan en 3 son 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83 y 93. Claro, entre los que se adicionarán a a lista de los múltiplos de 3 son precisamente los que no son: 13,23,43,53,73 y 83. Es decir que en total se aplaudirán $33 + 6 = 39$.

12. ***Respuesta* (B)** Si l es el lado de un cubo, entonces su volumen es $V = l \times l \times l = l^3$, entonces si $V = 125\text{cm}^3$. Por tanto, tenemos que $l = 5\text{cm}$. Luego, el área de una de las caras es $5\text{cm} \times 5\text{cm}^2 = 25\text{cm}^2$.

13. ***Respuesta* (E)** Haciendo las comparaciones entre las correspondientes figuras obtenemos las siguientes conclusiones:

    a) El pentágono pesa más que cuadrado por A es más liviano que B.

    b) Entre A y C concluímos que el cuadrado es más liviano que el rectángulo.

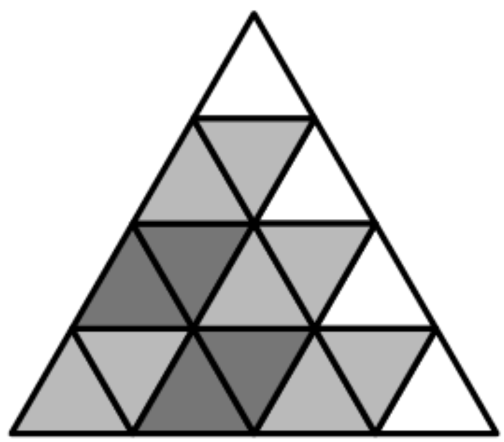
    c) D no puede estar después de B porque el cuadro es menor al pentágono.

    d) D no puede estar antes de A porque el pentágono pesa más que el cuadrado.

    Por tanto, D tiene que estar entre A y B.

14. ***Respuesta* (A)** *Solución 1.* Un rombo formado por dos triángulos debe tener una de las siguientes orientaciones

Se puede ver que existen 6 rombos con la primera orientación:



Por simetría, existirán 6 rombos con la segunda y 6 con la tercera orientación. En total serán 18 rombos.

Solución 2. Cada uno de los rombos está determinado por su menor digaonal; las menores diagonales son los lados interiores de los triángulos, que son $3 \times 6 = 18$.

15. ***Respuesta* (B)** Si sumamos todas las edades dadas notemos la edad de cada estudiantes aparcerá nueva veces, es decir:

$$82 + 83 + 84 + 85 + 87 + 89 + 90 + 90 + 91 + 92 = 873$$

es 9 veces la suma de las 10 personas, por tanto $873/9 = 97$ es la suma de todas las edades. La menor persona es quien obtuvo la mayor suma posible, 92. Por tanto, su edad es $97 - 92 = 5$.

4. Clave de respuestas

1. (A)
2. (E)
3. (C)
4. (D)
5. (B)
6. (B)
7. (C)
8. (E)
9. (C)
10. (B)
11. (D)
12. (B)
13. (E)
14. (A)
15. (B)

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: olimpiadaOPM@gmail.com
http://www.opmat.org