Olimpiada Paceña de Matemática
Carrera de Matemática – Instituto de Investigación Matemática,
Facultad de Ciencias Puras y Naturales,
Universidad Mayor de San Andrés,
La Paz, Bolivia.

Cuaderno N° 2

Banco de Problemas 2015
Categoría β

Editado por

Charlie Lozano Correa
Jimmy Santamaria Torrez

La Paz – Bolivia

Presentación

Los cuadernos de la Olimpiada Paceña de Matemática son compendios breves sobre temas específicos. El Cuaderno N° 2 es un grupo de problemas que está dirigido a los estudiantes y profesores interesados en participar en la Categoría β de la 10^a Olimpiada Paceña de Matemática. Les recordamos que una olimpiada no es una evaluación de conocimientos y los problemas que encontrarán en este Cuaderno son una referencia de las características de los problemas que encontrarán en la Primera Fase de la OPM y no es una descripción de contenidos.

Este cuaderno está divido en cuatro secciones y sugerimos que se trabaje con la siguiente metodología. Cuando encuentre la solución, compare su respuesta con la que se encuentra en la Claves, si no coinciden, puede ver las sugerencias y revisar su solución. Cuando su respuesta coincida con la de las Claves compare su solución con la que se brinda en el tercera sección. Una solución se valora y entiende mejor cuando se ha intentando resolver el problema por algún tiempo.

Para aprender a resolver problemas, se deben resolver problemas. Claro, comenzando con los adecuados al nivel, pero cada vez deben ser más complejos y sus soluciones deberán requerir mayor ingenio y experiencia.

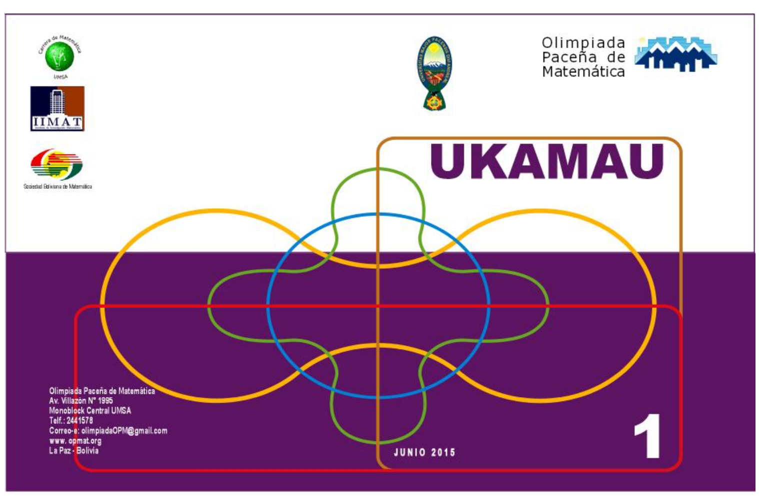
1 de agosto de 2015

Olimpiada Científica Estudiantil Plurinacional Boliviana

Material cedido para su distribución en medios magnéticos por el Instituto de Investigación Matemática-IIMAT, dependiente de la Carrera de Matemática de la Facultad de Ciencias Puras y Naturles-U.M.S.A., al Viceministerio de Ciencia y Tecnología del Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia.

14 de marzo de 2016

Material de Olimpiadas: Revista UKAMAU



UKAMAU, es la revista de la Olimpiada Paceña de Matemática. La Revista UKAMAU es una publicación regular del Instituto de Investigación Matemática-IIMAT de la Universidad Mayor de San Andrés con la colaboración de la Sociedad Boliviana de Matemática. En el año 2015 se han publicado los dos primeros números de la Revista, el primer número tiene 109 problemas de olimpiadas para secundaria con solución completa, además de 63 problemas propuestos. El número dos tiene 145 problemas para secundaria con solución completa.

Cualquier número de la Revista UKAMAU tiene costo de Bs. 25, están disponibles para su compra en:

1. Biblioteca de la Carrera de Matemática. Edificio Antiguo, Monoblock Central. Av. Villazón No 1995(Horario de oficina).

2. Si está interesado en hacer la comprar desde el interior de Bolivia, escribir para olimpiadaOPM@gmail.com

Índice

1. Enunciados de los problemas **3**

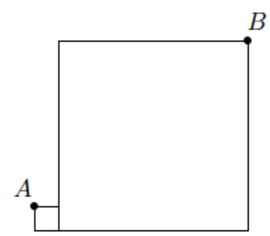
2. Sugerencias y hechos que ayudan **6**

3. Soluciones **7**

4. Clave de respuestas **12**

1. Enunciados de los problemas

1. Dos cuadrados se posicionan como en la figura. El cuadrado pequeño tiene lado 1 y el cuadrado mayor tiene lado 8. ¿La distancia del punto A al punto B es?

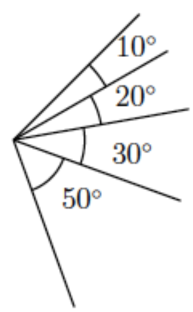


(A) 11 (B) $\sqrt{130}$ (C) 12 (D) $\sqrt{132}$ (E) 9

2. El número de enteros entre $-\sqrt{8}$ y $\sqrt{32}$ es:

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

3. ¿Cuántos ángulos de diferentes medidas puedes ver en la figura?



(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 11

4. De los números naturales entre 10 y 99, determina aquel que al dividirlo por la suma de sus dígitos obtienes el menor valor posible

(A) 99 (B) 89 (C) 91 (D) 19 (E) 11

5. Halla todos los posibles valores que puede tomar el dígito de las unidades del producto de dos números consecutivos y determina cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

(A) son números impares

(B) son primos

(C) suman 8

(D) multiplicados da 12

(E) son no nulos

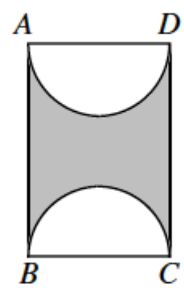
6. Diez equipos participaron de un campeonato de football de salón, cada equipo jugó con cada uno de los otros equipos solamente una vez. En cada partido, el ganador obtenía 3 puntos y el perdedor 0 puntos, y en caso de existir un empate, cada uno de los equipos obtenía 1 punto. Al final del campeonato la suma de todos los puntos que obtuvieron los equipos fue de 130. ¿Cuántos partidos terminaron empatados?

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

7. ¿De cuántas formas podemos expresar 2015 como la suma de uno o más enteros consecutivos?

   (A) 8 (B) 7 (C) 10 (D) 3 (E) 1

8. $ABCD$ es un rectángulo con $AD = 10$. El área sombreada vale 100



   Encuentra la distancia entre los dos semicírculos, es decir, la longitud del segmento más corto que los une.

   (A) $2{,}5\pi$ (B) 5π (C) π (D) $2{,}5\pi + 5$ (E) $2{,}5\pi - 2{,}5$

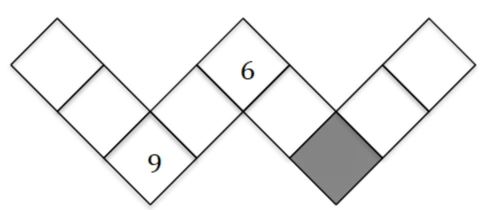
9. Cuatro números naturales tienen la propiedad que si sumamos dos de ellos obtenemos los números 2001, 2007, 2008, 2009 o 2015. Halla la suma de esos cuatro números.

   (A) 4016 (B) 2015 (C) 8025 (D) 6401 (E) 14

10. Considere el cojunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2011\}$. ¿Cuántos subconjuntos de A existen de manera que la suma de sus elementos sea exactamente 2023060.

    (A) 6 (B) 30 (C) 32 (D) 33 (E) 4

11. En cada una de las casillas de la figura, se escribe un número entero del 1 al 9 de manera que la suma de las lineas que existen es la misma. Si ya están escritos el 6 y el 9 donde se muestran, ¿cuál es el número que se debe escribir en la casilla sombreada?



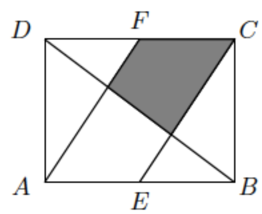
    (A) 1 (B) 8 (C) 5 (D) 4 (E) 3

12. Imagina las primeras 2015 potencias de 3. Sobre dos potencias consecutivas coloca su diferencia, como en el arreglo abajo, y súmalas. El resultado que obtienes es:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 6 & & 18 & & \dots & \\ 1 & & 3 & & 9 & & 27 & \dots & 3^{2015} \end{array}$$

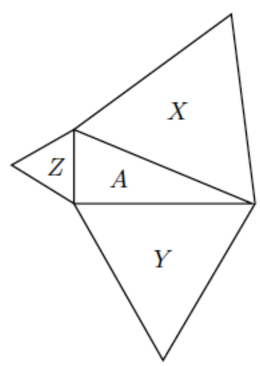
(A) 2015^3 (B) 3^{2015} (C) 2015 (D) $3^{2015} - 1$ (E) $2015^3 - 1$

13. En la figura $ABCD$ es un rectángulo cuya área es de 10 cm^2. Los puntos E y F son los puntos medios de los segmentos AB y DC respectivamante. Encontrar el área de la región sombreada.



(A) 2 cm^2 (B) 2,5 cm^2 (C) 3 cm^2 (D) 3,5 cm^2 (E) 4 cm^2

14. En la figura se muestran tres triángulos cuyas áreas son A, X, Y y Z. El triángulo del medio, el que tiene área A, es un triángulo rectángulo. Los otros tres triángulos son equiláteros



¿Cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

(A) $Z + Y = X$ (B) $Z^2 + Y^2 = X^2$ (C) $X + Y + Z = 3A$
(D) $Z + Y = (3\sqrt{2})A$ (E) Ninguna relación de las anteriores.

15. Daniel llega tarde a clase y copia apresuradamente de la pizarra la siguiente secuencia de números:

$$113, 137, 149, 155, 173$$

que luego el profesor borra. Uno de sus compañeros le dice que la secuencia tenía seis números y que forman una progresión aritmética, además, revisando sus apuntes descubre que copió mal uno de los números. ¿Cuál es la diferencia de la progresión aritmética?

(A) 6 (B) 18 (C) 12 (D) 24 (E) 25

2. Sugerencias y hechos que ayudan

1. Intenta visualizar al segmento AB como la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

2. Sin ayuda de una calculadora intentar determinar entre que enteros debe estar $-\sqrt{8}$ y $\sqrt{32}$.

3. Angulos contiguos: dos, tres o más formas nuevos ángulos.

4. Puedes expresar un número entre 10 y 99 como $\overline{ab} = 10\,a + b$, donde $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. El problema consiste en determinar el menor valor posible del cociente
$$\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10\,a+b}{a+b}.$$

5. Prueba primero con enteros consecutivos de un solo dígito. ¿Por qué es suficiente considerar estos enteros?

6. En cada partido se reparten dos o tres puntos. Determinar la cantidad de partidos jugados te puede ayudar.

7. Dos números consecutivos tienen la forma a, $a+1$, tres tienen la forma a, $a+1$, $a+2$, cuatro tienen la forma a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, y así sucesivamente. Sumalos en cada caso e identifica un patrón, luego analiza lo que sucede cuando esas sumas son iguales a 2015.

8. Intentar encontrar el área del rectángulo.

9. Ordena los cuatro números de menor a mayor $a < b < c < d$ y analiza las posibles sumas de a dos, $a+b$, $a+c$, etc.

10. Suma todos los elementos del conjunto A, si es muy próximo a 2023060 significa que los subconjuntos que buscas no pueden tener muchos menos elementos del total.

11. ¿Que obtienes si sumas las cuatro sumas de las lineas?

12. Tres potencias consecutivas de 3 tienen la forma 3^k, 3^{k+1} y 3^{k+2}, la diferencia entre los dos primeros es $3^{k+1} - 3^k$ y entre los dos últimos $3^{k+2} - 3^{k+1}$. Suma estos números y analiza lo que sucede. Prueba ahora con cuatro potencias consecutivas de 3 y la suma de sus respectivas diferencias consecutivas.

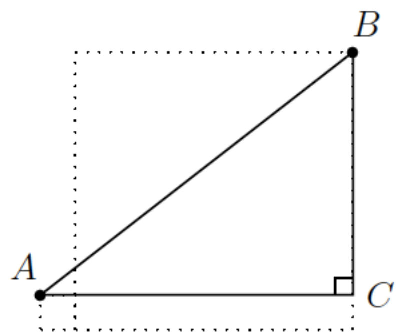
13. Traza el segmente EF.

14. Determina el área de un triángulo equilátero de lado a. Utiliza el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo del centro.

15. Recuerda que en una progresión aritmética la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre la misma, este es el número que se denomina *diferencia de la progresión.*

3. Soluciones

1. ***Respuesta* (B)** En la figura podemos formar un triángulo rectángulo de la siguiente forma

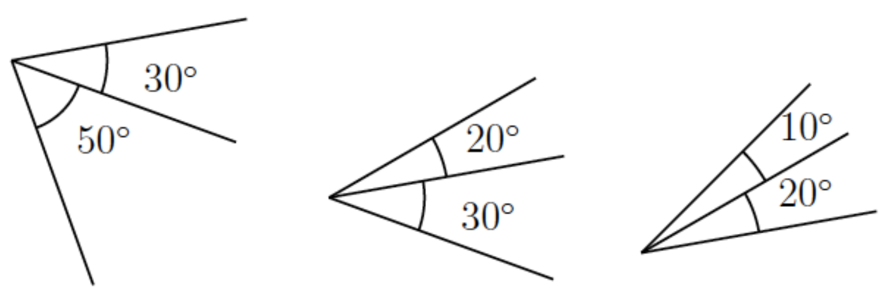


Notando que $AC = 1 + 8 = 9$ y $BC = 8 - 1 = 7$, usamos el Teorema de Pitágoras

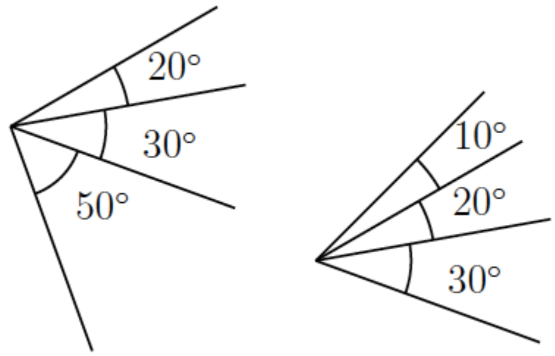
$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{81 + 49} = \sqrt{130}.$$

2. ***Respuesta* (D)** Un número a tal que $a^2 = 8$, no puede ser mayor a 3 ni puede ser menor que 2, porque $3^2 = 9$ y $2^2 = 4$. Es decir $2 < \sqrt{8} < 3$, luego $-3 < -\sqrt{8} < -2$. Similarmente, un número b tal que $b^2 = 32$ no puede ser mayor a 6 ni menor a 5, es decir $5 < \sqrt{32} < 6$. Por tanto los enteros entre $-\sqrt{8}$ y $\sqrt{32}$ son: -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

3. ***Respuesta* (C)** A la vista tenemos 4 ángulos de medidas diferentes. Sin embargo, dos angulos contiguos forman otro ángulo. Entonces, tendríamos tres ángulos:



El primero mide 80°, el segundo 50° y el tercero 30°. Sin embargo, de estos tres ángulos solo tomamos en cuenta el primero, en los primeros cuatro ángulos existen dos que miden 50° y 30°. Tres ángulos contiguos forman otro ángulo, entonces tenemos dos ángulos:



El primero mide 100° y el segundo 60°. Finalmente, el ángulo formado por los cuatro ángulos mide 110°. Por tanto, tendremos 8 ángulos de medidas diferentes.

4. ***Respuesta* (D)** Inicialmente observa que puedes expresar un número entre 10 y 99 como $\overline{ab} = 10\,a + b$, donde $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. El problema consiste en determinar el menor valor posible del cociente

$$\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10\,a+b}{a+b}$$

Observa entonces que podemos expresar este último cociente como

$$\frac{10\,a+b}{a+b} = 1 + \frac{9\,a}{a+b} = 1 + \frac{9}{1+\frac{b}{a}}$$

Así, el problema se reduce a determinar para qué valores de a y b el cociente $\frac{b}{a}$ toma el mayor valor posible, lo que es equivalente a buscar el mayor posible valor para el numerador, a saber 9 y el menor para el denominador, a saber 1. Por lo tanto, el número que buscamos es el 19.

5. ***Respuesta* (C)** Veamos primero lo que pasa con enteros consecutivos de un dígito. Es suficiente considerar este caso porque para cualesquiera dos números consecutivos los dígitos de sus unidades son también consecutivos y en el producto el dígito de las unidades es justamente determinado por el producto de estos dos dígitos. Entonces, tenemos los pares; (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), (8,9) y los respectivos productos; 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72. Luego los dígitos de las unidades son 0, 2 y 6, que sumados dan 8. La única de las cinco afirmaciones que es correcta es la (C).

6. ***Respuesta* (E)** Notemos que en cada partido, se reparten dos o tres puntos, dependiendo de si hay un empate o si algún equipo gana el partido. Determinaremos el total de partidos de la siguiente forma: El primer equipo juega con cada uno de los otros equipos, es decir, son 9 partidos. El segundo equipo juega con todos a partir del tercero, porque ya jugó con el primero, entonces son 8 partidos. El tercer equipo juega con los restantes 7 porque sus partidos con los dos primeros equipos ya fueron contados. Entonces el total de partidos es:

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1 = \frac{9\times 10}{2} = 45.$$

El total de puntos que se habrían repartido si no hubiese existido un empate habría sido $3 \times 45 = 133$. En vista que, se repartieron 130 puntos, concluímos que existieron 5 empates.

7. ***Respuesta* (A)** Veamos algunas sumas de enteros consecutivos;

$$\begin{aligned} a + (a+1) &= 2a + 1 \\ a + (a+1) + (a+2) &= 3a + (1+2) \\ a + (a+1) + (a+2) + (a+3) &= 4a + (1+2+3) \\ &\vdots \\ a + (a+1) + \cdots + (a + (k-1)) &= ka + (1 + 2 + \cdots + (k-1)) \end{aligned}$$

Y como $1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$, la condición para que la suma de k enteros consecutivos sea 2015 es

$$ka + \frac{(k-1)k}{2} = 2015$$

Que es equivalente a $k(2a + (k-1)) = 4030$, de donde observamos que k debe dividir a 4030. Además, como a y k son enteros positivos la suma tiene sentido solo si $4030 \geq (k-1)k$. Los divisores de 4030 que cumplen esta última condición son 1, 2, 5, 10, 13, 26, 31, 62. Así, de la identidad equivalente

$$a = \frac{4030 - (k-1)k}{2k}$$

determinamos los posibles valores de a, que son: 2015, 1007, 401, 197, 149, 65, 50 y 2.

8. ***Respuesta* (A)** Si AD mide 10, entonces el radio de cada uno de los dos semicírculos es de $\frac{1}{2}(10) = 5$. Como los dos semicírculos completan un círculo de radio $r = 5$, su área combinada será de $\pi(5^2) = 25\pi$. Entonces, el área total del rectángulo es de $25\pi + 100$. Como la base del rectángulo es $AD = 10$, tenemos que su área $10(AB) = 25\pi + 100$, de donde $AB = 2{,}5 + 10$. La menor distancia entre los dos semicírculos será entonces $(2{,}5 + 10) - 10 = 2{,}5\pi$.

9. ***Respuesta* (A)** Inicialmente ordena los cuatro números de menor a mayor: $a < b < c < d$ y observa que con ese orden tenemos:

$$a + b < a + c < b + c < b + d < c + d$$

Entonces, $c+d = 2015$ y $b+d = 2009$, restando $c-b = 6$ y como $b+c = 2008$, sumando tenemos $2c = 2014$ y así $c = 1007$, $d = 2015 - c = 2015 - 1007 = 1008$ y $b = c - 6 = 1007 - 6 = 1001$. Finalmente, como $a + c = 2007$, $a = 2007 - c = 2007 - 1007 = 1000$. Por lo tanto los números que buscamos son $1000, 1001, 1007$ y 1008, que sumados dan 4016.

10. ***Respuesta* (E)** En este problema utilizaremos una vez más la importante expresión

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

donde los puntos significan que están todos los número hasta llegar a n.

Notemos que el conjunto A tienen 2011 elementos. La suma de todos sus elementos es:

$$1+2+3+\cdots+2010+2011=\frac{2011\times 2012}{2}=2023066.$$

Entonces, para obtener un subconjunto de A cuya suma de elementos sea 2023060, basta retirar elementos de A cuya suma sea 6. Los posibles casos son:

- Retiramos subconjuntos con un elemento, solo existe la posibilidad $\{6\}$.
- Retiramos subconjuntos con dos elementos cuya suma sea 6, existen dos posibilidades $\{1,5\}$ y $\{2,4\}$.
- Retiramos subonjuntos con tres elementos cuya suma sea 6, solo existe la posibilidad $\{1,2,3\}$.
- Si retiramos un subconjunto que tenga más de tres elementos, los restantes sumarán menos de 2023060.

Por tanto, existen 4 subconjuntos de A cuya suma es exactamente 2023060.

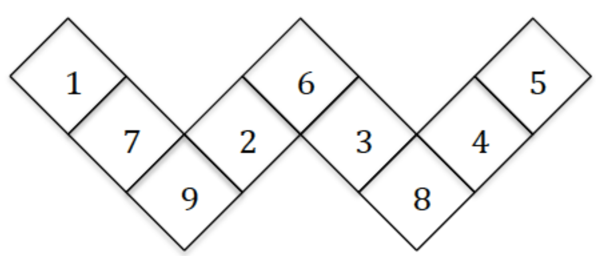
11. ***Respuesta*** **(B)** Sea x el número en la casilla sombreada. Sea S la suma de los números de cada una de las cuatro filas. Como 9, 6 y x están en dos líneas, la suma de todas las sumas de las líneas es:

$$4S=(1+2+3+\ldots+9)+6+9+x.$$

Entonces $4S=60+x$, de donde

$$S=15+\frac{x}{4}.$$

Como S es un número natural, x debe ser divisible por 4, y como es menor a 9. Solo hay dos posibilidades $x=4$ o $x=8$, con estos valores tenemos $S=16$ o $S=17$, respectivamente. Si $x=4$ el número que falta en la fila del 6 debería ser $16-6-4=6$, pero el ningún número se debe repetir. Entonces, el número que está faltando es $x=8$, de hecho la siguiente figura muestra una posible forma de llenar todas las casillas:



12. ***Respuesta*** **(D)** Las n primeras potencias de 3 son

$$1,3,9,27,\ldots 3^k$$

y las respectivas diferencias consecutivas son

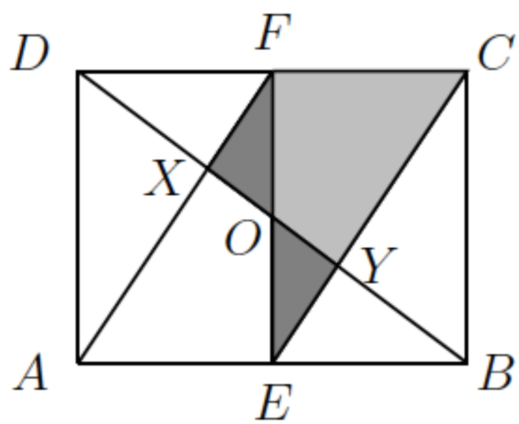
$$3^1 - 3^0, 3^2 - 3^1, 3^3 - 3^2, \ldots, 3^k - 3^{k-1}$$

que sumados generan lo que se denomina una suma telescópica

$$(3^1 - 3^0) + (3^2 - 3^1) + (3^3 - 3^2) + \cdots + (3^k - 3^{k-1}) = 3^k - 1$$

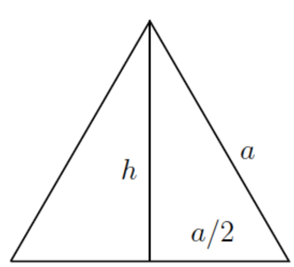
Así, la suma que buscamos es $3^{2015} - 1$

13. ***Respuesta* (B)** Trazamos el segmento EF como se muestra en la siguiente figura:



El punto de intersección de EF con la diagonal DB determina O, el centro del rectángulo. Por la simetría notamos que los triángulo $\triangle XOF$ y $\triangle YOE$ son iguales, por tanto tienen la misma área. Por tanto el área de la región sombreada de la pregunta es igual al área del triángulo $\triangle FEC$. Por simetría, este triángulo tiene 1/4 del área de todo el rectángulo, es decir su área es de 2,5 cm^2.

14. ***Respuesta* (A)** Para resolver este problema comenzaremos precisando una situación general, determinar el área de un triángulo equilátero de lado a. Como en la figura trazamos la respectiva altura



Por el Teorema de Pitágoras tenemos

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

de donde $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Entonces el área del triángulo equilátero de lado a es

$$\frac{ah}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Sean a, b los catetos del triángulo central del problema y c su hipotenusa, por el Teorema de Pitágoras tenemos que $c^2 = a^2 + b^2$. Pero a es el lado del triángulo equilátero de área Z, b es el lado del triángulo equilátero de área Y y c es el lado del triángulo equiláter de área X. Multiplicando por $\frac{\sqrt{3}}{4}$ la igualdad que obtuvimos del Teorema de Pitágoras obtenemos

$$\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

es decir, tenemos

$$X = Y + Z.$$

15. ***Respuesta* (C)** Primeramente veamos las diferencias de los términos consecutivos de la serie de números, que son; 24, 12, 6 y 18. Analicemos cada caso. Si la diferencia es 24, los términos 149, 155 y 173, estarían equivocados, lo que es imposible. Si la diferencia fuera 12, entonces entre 113 y 137 debería estar el 125, que sería el término faltante, y el término 155 estaría equivocado, debiendo estar en su lugar 161, esta es una posibilidad admisible. Si la diferencia fuera 6, faltarían 3 términos entre 113 y 137, un término entre 137 y 149 y el término 173 estaría equivocado, lo que es también imposible. Si la diferencia es 18 el término 149 estaría equivocado, no debería estar en la serie y faltarían mas de un término, lo cual es imposible.

4. Clave de respuestas

1. (B)
2. (D)
3. (C)
4. (D)
5. (C)
6. (E)
7. (A)
8. (A)
9. (A)
10. (E)

11. (B)
12. (D)
13. (B)
14. (A)
15. (C)

Olimpiada Paceña de Matemática
Av.Villazón 1995 Predio Central UMSA,
Planta Baja del Edificio Viejo, Teléfono 2441578,
e-mail: olimpiadaOPM@gmail.com
http://www.opmat.org